

Упражнения к темам

17 ноября 2022 г.

Введение

Умножение матриц

Чему равно произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Тензорное произведение

Найдите, чему равно тензорное произведение матрицы на саму себя

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Является ли полученная матрица унитарной?

Однокубитные операции

Свойства операций

Доказать, что:

- $HXH = Z$
- $HYH = -Y$

- $HZH = X$
- $T^2 = S$

Представление на сфере Блоха

Докажите, что с точностью до общей фазы T является поворотом вокруг оси z на угол $\pi/4$.

Представьте оператор Адамара H в виде произведения поворотов R_x и R_z , а также общего фазового множителя $e^{i\phi}$.

Пусть $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — вещественный трёхмерный единичный вектор. Определим оператор $R_{\hat{n}}(\theta)$ следующим образом:

$$R_{\hat{n}}(\theta) = \exp(-i\theta\hat{n} \cdot \vec{\sigma}/2) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_xX + n_yY + n_zZ), \quad (3)$$

где $\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$ — вектор, составленный из матриц Паули.

Докажите, что $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$.

Докажите, что произвольный унитарный оператор U можно записать в виде

$$U = \exp(i\alpha)R_{\hat{n}}(\theta) \quad (4)$$

для некоторых вещественных α и θ и вещественного трёхмерного единичного вектора \hat{n} .

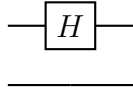
Найдите значения α, θ, \hat{n} , при которых получится оператор Адамара H .

Найдите значения α, θ, \hat{n} , при которых получится оператор сдвига фазы S .

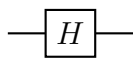
Проверьте, что операторы Y и Z действительно задают повороты вокруг осей y и z .

Многокубитные операции

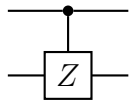
Как выглядит матрица 4×4 для схемы



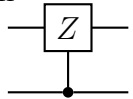
Как выглядит матрица 4×4 для схемы



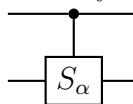
Докажите, что матрицы для следующих схем совпадают:



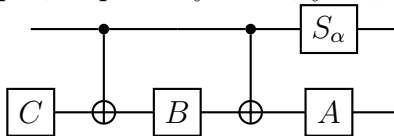
и



Пусть $S_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$. Можно ли представить следующий оператор (см. схему) в виде произведения двух операторов, действующих на отдельные кубиты?



Пусть $U = \exp(i\alpha)AXBXC$, и $ABC = I$. Пусть $S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$ Какую операцию реализует следующая схема?



Оракулы

Проверьте, что способ, которым оракул O_2 преобразуется в оракул O_1 , действительно работает.

Придумайте способ для преобразования оракула O_1 , задающего функцию изменением фазы помеченного состояния, в оракул O_1 , задающий ту же функцию при помощи вспомогательного кубита.

Убедитесь, что оракул U_{11} работает правильно

Является ли NOT обратимой функцией? Является ли AND обратимой функцией? Является ли XOR обратимой функцией?

Если да — приведите обратные функции для них. Если нет — докажите это.

Найдите обратную функцию F' для обратимой функции F , построенной из произвольной булевой функции f при помощи вспомогательного входа.

Постройте гейт Фредкина из гейта Тоффоли.

Постройте гейт Тоффоли из гейта Фредкина.

Алгоритмы Дойча и Дойча-Йожи

Докажите, что для произвольного $x \in \{0, 1\}^n$

$$H^n|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle,$$

где $x \cdot y$ — сумма по модулю 2 произведений соответствующих битов x и y : $x \cdot y = x_1y_1 \oplus x_2y_2 \oplus \dots \oplus x_ny_n$.

Алгоритм Саймона

Постройте классический алгоритм решения задачи Саймона. Докажите, что он работает за $O(2^{n/2})$.

$$\text{Докажите, что } (x \oplus s) \cdot y = (x \cdot y) \oplus (s \cdot y)$$

Алгоритм Гровера

Докажите, что условный сдвиг фазы в реализации оператора Гровера можно записать в виде:

$$2|0\rangle\langle 0| - I$$

Реализуйте условный сдвиг фазы, используя стандартные гейты X, Y, Z, H и контролируемые операции.

Докажите, что оператор Гровера G можно записать следующим образом:

$$G = 2|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| - I$$

Квантовое преобразование Фурье

Взяв за основу `make_qft`, реализуйте обратное преобразование Фурье (в нём отличаются только знак угла поворота):

```
def make_qft_inverse(qubits):  
    # your code here!  
    pass
```