

Многокубитные операции

Квантовые вычисления–2023

19 сентября 2023 г.

Outline

- 1 Сложные системы
- 2 Вычисления
- 3 Многокубитные операции
- 4 Разложение на операции

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

■ состояние системы, состоящей из A и B?

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из A и B?
- оказывается $A \otimes B$:

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

■ состояние системы, состоящей из A и B?

■ оказывается $A \otimes B$:

■ базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

■ состояние системы, состоящей из A и B?

■ оказывается $A \otimes B$:

■ базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$

■ поэтому состояние

$$c_{00}|u_0\rangle|v_0\rangle + c_{01}|u_0\rangle|v_1\rangle + c_{10}|u_1\rangle|v_0\rangle + c_{11}|u_1\rangle|v_1\rangle,$$

Состояния сложных систем

■ система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

■ система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

■ состояние системы, состоящей из A и B?

■ оказывается $A \otimes B$:

■ базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$

■ поэтому состояние

$$c_{00}|u_0\rangle|v_0\rangle + c_{01}|u_0\rangle|v_1\rangle + c_{10}|u_1\rangle|v_0\rangle + c_{11}|u_1\rangle|v_1\rangle,$$

■ где $c_{00}^2 + c_{01}^2 + c_{10}^2 + c_{11}^2 = 1$

- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:

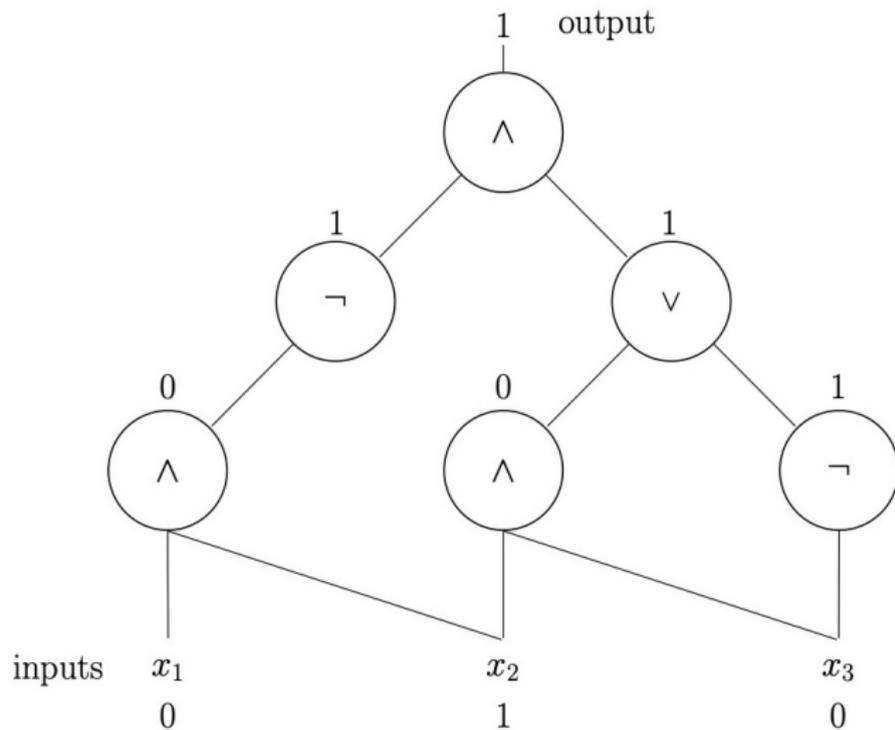
- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:
- состояние

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle + |01\rangle)$$

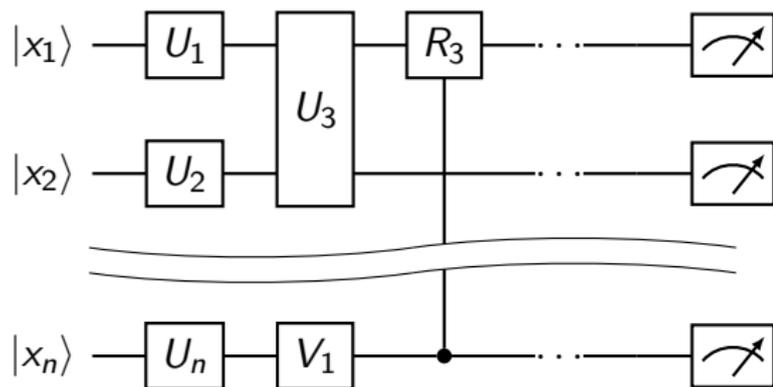
- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:
- состояние

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle + |01\rangle)$$

- можно представить в виде $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$?



Квантовые схемы



Квантовые схемы для вычислений

NOT

$$|x\rangle \text{ --- } \oplus \text{ --- } |\neg x\rangle$$

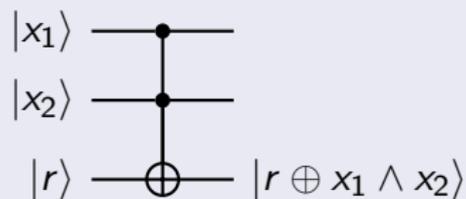
Квантовые схемы для вычислений

NOT

$$|x\rangle \text{ --- } \oplus \text{ --- } |\neg x\rangle$$

- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты



Квантовые схемы для вычислений

NOT

$$|x\rangle \text{ --- } \oplus \text{ --- } |\neg x\rangle$$

- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты

$$\begin{array}{c} |x_1\rangle \text{ --- } \bullet \\ |x_2\rangle \text{ --- } \bullet \\ |r\rangle \text{ --- } \oplus \end{array} \text{ --- } |r \oplus x_1 \wedge x_2\rangle$$

- $100 \mapsto 100$
- $110 \mapsto 111$
- $101 \mapsto 101$
- $111 \mapsto 110$

Квантовые схемы для вычислений

NOT

$$|x\rangle \text{ --- } \oplus \text{ --- } |\neg x\rangle$$

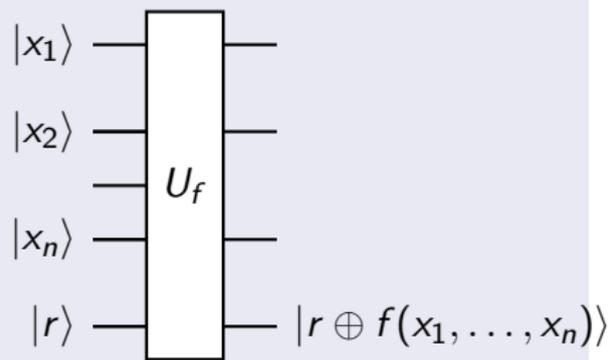
- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты

$$\begin{array}{c} |x_1\rangle \text{ --- } \bullet \\ |x_2\rangle \text{ --- } \bullet \\ |r\rangle \text{ --- } \oplus \end{array} \text{ --- } |r \oplus x_1 \wedge x_2\rangle$$

- $100 \mapsto 100$
- $110 \mapsto 111$
- $101 \mapsto 101$
- $111 \mapsto 110$

$f(x_1, \dots, x_n)$



Definition

Схема C **вычисляет** функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если:

- для всех наборов x_1, \dots, x_n

$$\Pr \left[\mathcal{M}(U_C | x_1, \dots, x_n) = r \right] > \frac{2}{3},$$

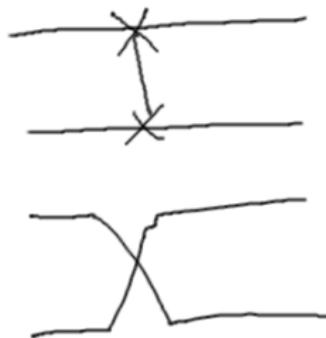
где $r = f(x_1, \dots, x_n)$

SWAP

- меняем местами значения двух кубитов

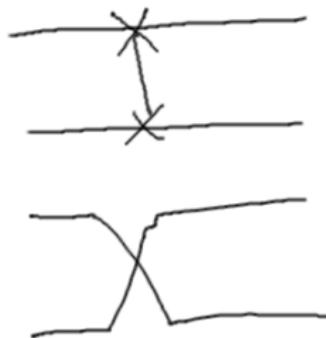
SWAP

- меняем местами значения двух кубитов
- обозначение



SWAP

- меняем местами значения двух кубитов
- обозначение



- матрица

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- «условный оператор»

CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит = 1

CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит = 1
- ничего не делаем, если управляющий = 0

CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит = 1
- ничего не делаем, если управляющий = 0
- матрица

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- «условно применяем» U

Controlled-U

- «условно применяем» U
- controlled- U , управляемый U

Controlled-U

- «условно применяем» U
- controlled- U , управляемый U
- обозначение



CCNOT

- controlled (controlled NOT)

CCNOT

- controlled (controlled NOT)
- преобразует:

$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

CCNOT

- controlled (controlled NOT)

- преобразует:

$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

CCNOT

- controlled (controlled NOT)

- преобразует:

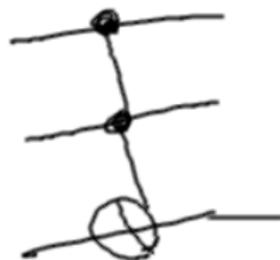
$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

- обозначение:



CCNOT

- controlled (controlled NOT)

- преобразует:

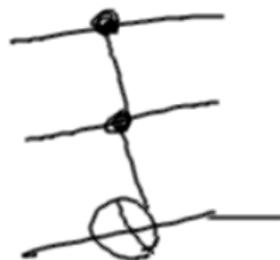
$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

- обозначение:



- аналогично: CCU, C^3U , ...

Способы управления

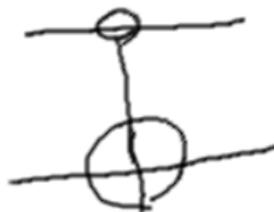
- применяем NOT, если управляющий кубит = 0

Способы управления

- применяем NOT, если управляющий кубит = 0
- ничего не делаем, если управляющий = 1

Способы управления

- применяем NOT, если управляющий кубит = 0
- ничего не делаем, если управляющий = 1
- обозначение:



- сколько всего операторов на n кубитах?

- сколько всего операторов на n кубитах?
- сколько всего квантовых схем на n кубитах из наших операторов?

- сколько всего операторов на n кубитах?
- сколько всего квантовых схем на n кубитах из наших операторов?
- почему их достаточно?

Теорема Соловья-Китаева (Solovay-Kitaev)

Theorem

Для произвольного $\epsilon > 0$ и для любого U существует схема C глубины $\log^{3.001}(1/\epsilon)$ такая, что $\|C - U\| \leq \epsilon$.

Эта схема C состоит только из гейтов CNOT, H, S и T.