Однокубитные операции

Квантовые вычисления–2023

12 сентября 2023 г.

Outline

Состояния квантовых систем

Двухуровневые системы

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Состояния квантовых систем

Двухуровневые системы

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Многоуровневые системы

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \ldots + c_{N-1}|N-1\rangle,$$

где $c_j \in \mathbb{C}$, $\sum_{j=0}^{N-1} c_j^2 = 1$

Примеры

Поляризация

$$|\updownarrow\rangle = |0\rangle$$

$$|\leftrightarrow\rangle = |1\rangle$$

Примеры

Поляризация

$$|\updownarrow\rangle = |0\rangle$$

$$|\leftrightarrow\rangle = |1\rangle$$

Диагональная

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\updownarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle)$$

$$|\nwarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\updownarrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle)$$

Примеры

Поляризация

$$|\updownarrow\rangle = |0\rangle$$

$$|\leftrightarrow\rangle = |1\rangle$$

Диагональная

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle\right)$$

$$|\nwarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle\right)$$

Круговая

$$|\circlearrowleft\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle + i|\leftrightarrow\rangle\right)$$

$$|\circlearrowright\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle - i|\leftrightarrow\rangle\right)$$

Обозначения Дирака

bra-ket — от bracket

Кет-вектор

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Обозначения Дирака

bra-ket — от bracket

Кет-вектор

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Бра-вектор

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

Обозначения Дирака

bra-ket — от bracket

Кет-вектор

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Бра-вектор

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение (bracket)

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.
- Полярное представление: $\alpha_k = r_k e^{i\phi_k}$

Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.
- Полярное представление: $\alpha_k = r_k e^{i\phi_k}$
- Выносим $e^{i\phi_0}$ за скобки

Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.
- Полярное представление: $\alpha_k = r_k e^{i\phi_k}$
- Выносим $e^{i\phi_0}$ за скобки
- Обозначаем $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0$: $|\Psi\rangle = e^{i\phi_0}(r_0|0\rangle + r_1 e^{i\Delta\phi}|1\rangle)$

Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.
- Полярное представление: $\alpha_k = r_k e^{i\phi_k}$
- Выносим $e^{i\phi_0}$ за скобки
- Обозначаем $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0$: $|\Psi\rangle = e^{i\phi_0}(r_0|0\rangle + r_1 e^{i\Delta\phi}|1\rangle)$
- $r_0^2 + r_1^2 = 1$, поэтому $r_0 = \cos\frac{\theta}{2}$; $r_1 = \sin\frac{\theta}{2}$

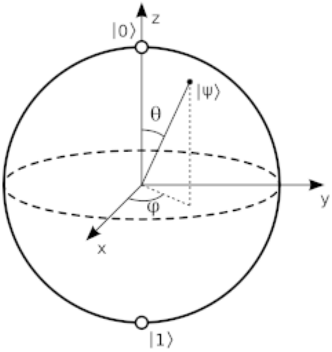
Параметризация кубита

- Состояние кубита: $|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$.
- Полярное представление: $\alpha_k = r_k e^{i\phi_k}$
- Выносим $e^{i\phi_0}$ за скобки
- Обозначаем $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0$: $|\Psi\rangle = e^{i\phi_0}(r_0|0\rangle + r_1 e^{i\Delta\phi}|1\rangle)$
- $r_0^2 + r_1^2 = 1$, поэтому $r_0 = \cos\frac{\theta}{2}$; $r_1 = \sin\frac{\theta}{2}$
- В итоге:
$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\Delta\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Сфера Блоха

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\Delta\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Два угла задают точку на сфере Блоха:



Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$

Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$
- Согласно физике, линейная комбинация сохраняется

Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$
- Согласно физике, линейная комбинация сохраняется
- Будем искать M: $|\phi\rangle = M|\psi\rangle$

Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$
- Согласно физике, линейная комбинация сохраняется
- Будем искать M: $|\phi\rangle = M|\psi\rangle$
- Поскольку $|\phi\rangle$ должно быть физически реализуемым:

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|M^\dagger M|\psi\rangle = 1$$

Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$
- Согласно физике, линейная комбинация сохраняется
- Будем искать M: $|\phi\rangle = M|\psi\rangle$
- Поскольку $|\phi\rangle$ должно быть физически реализуемым:

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|M^\dagger M|\psi\rangle = 1$$

- Поэтому $M^\dagger M = I$, т.е.

Изменение состояния

- Пусть $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$
- Согласно физике, линейная комбинация сохраняется
- Будем искать M: $|\phi\rangle = M|\psi\rangle$
- Поскольку $|\phi\rangle$ должно быть физически реализуемым:

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|M^\dagger M|\psi\rangle = 1$$

- Поэтому $M^\dagger M = I$, т.е.
- M — унитарная матрица

NOT

- $|0\rangle \mapsto |1\rangle$

NOT

- $|0\rangle \mapsto |1\rangle$
- $|1\rangle \mapsto |0\rangle$

NOT

- $|0\rangle \mapsto |1\rangle$
- $|1\rangle \mapsto |0\rangle$
- Получаем:

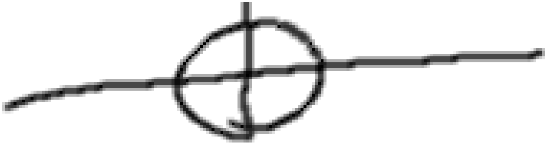
$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOT

- $|0\rangle \mapsto |1\rangle$
- $|1\rangle \mapsto |0\rangle$
- Получаем:

$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначение

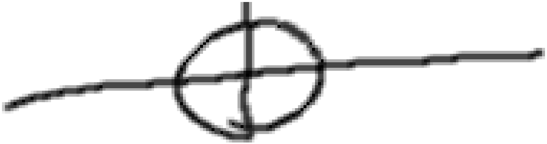


NOT

- $|0\rangle \mapsto |1\rangle$
- $|1\rangle \mapsto |0\rangle$
- Получаем:

$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначение



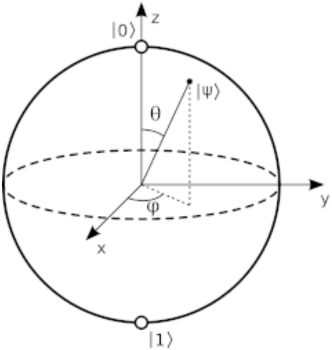
- Собственные вектора?

Другие повороты на 180

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

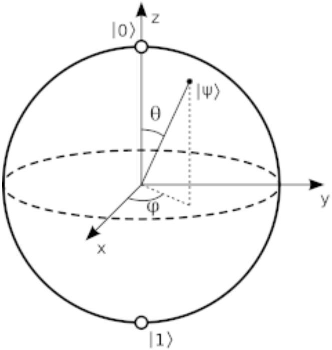
Другие повороты на 180

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$



Другие повороты на 180

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы Паули

- X, Y, Z, I — матрицы Паули,

Матрицы Паули

- X, Y, Z, I — матрицы Паули,
- базис для эрмитовых матриц 2×2,

Матрицы Паули

- X, Y, Z, I — матрицы Паули,
- базис для эрмитовых матриц 2×2,
- эрмитова матрица — самосопряжённая матрица: $A^T = \bar{A}$, или $A^\dagger = (\bar{A})^T = A$,

Матрицы Паули

- X, Y, Z, I — матрицы Паули,
- базис для эрмитовых матриц 2×2,
- эрмитова матрица — самосопряжённая матрица: $A^T = \bar{A}$, или $A^\dagger = (\bar{A})^T = A$,
- ими описываются все возможные физические величины, которые можно наблюдать.

Уравнение Шрёдингера

- Физика процесса: уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Уравнение Шрёдингера

- Физика процесса: уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

- Решение (при константном H):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

Уравнение Шрёдингера

- Физика процесса: уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

- Решение (при константном H):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

- Пусть собственные вектора H — $|\xi_1\rangle, \ldots, |\xi_d\rangle$ с собственными значениями λ_j

Уравнение Шрёдингера

- Физика процесса: уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

- Решение (при константном H):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

- Пусть собственные вектора H — $|\xi_1\rangle, \ldots, |\xi_d\rangle$ с собственными значениями λ_j
- Тогда $|\psi(0)\rangle = \sum_j \alpha_j |\xi_j\rangle$ переходит в

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j e^{-\lambda_j t/\hbar} \alpha_j |\xi_j\rangle$$

Произвольные углы

Повороты на угол θ

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2};$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2};$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2}.$$

Произвольные углы

Повороты на угол θ

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2};$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2};$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2}.$$

Матрицы поворотов

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Оператор Адамара

Идея

- «смешивает» состояние 0 и состояние 1

Оператор Адамара

Идея

- «смешивает» состояние 0 и состояние 1
- далее вычисляем одновременно для 0 и для 1

Оператор Адамара

Идея

- «смешивает» состояние 0 и состояние 1
- далее вычисляем одновременно для 0 и для 1
- «квантовый параллелизм»

Оператор Адамара

Идея

- «смешивает» состояние 0 и состояние 1
- далее вычисляем одновременно для 0 и для 1
- «квантовый параллелизм»

Оператор Адамара

Идея

- «смешивает» состояние 0 и состояние 1
- далее вычисляем одновременно для 0 и для 1
- «квантовый параллелизм»

Оператор Адамара (Hadamard)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Оператор изменения фазы

- любое однокубитное состояние:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Оператор изменения фазы

- любое однокубитное состояние:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

- как поменять ϕ — фазу состояния?

Оператор изменения фазы

- любое однокубитное состояние:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

- как поменять ϕ — фазу состояния?
- достаточно операторов S и T:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Оператор изменения фазы

- любое однокубитное состояние:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

- как поменять ϕ — фазу состояния?
- достаточно операторов S и T:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

- $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Оператор изменения фазы

- любое однокубитное состояние:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

- как поменять ϕ — фазу состояния?
- достаточно операторов S и T:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

- $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

- на какой угол они меняют фазу?

Измерения

- не унитарные!
- нарушают квантовое состояние

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

- результат измерения $\mathcal{M}$:

$$\Pr\left[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\right] = \left|\langle v_j|\psi\rangle\right|^2.$$

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

- результат измерения $\mathcal{M}$:

$$\Pr\Big[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\Big] = \Big|\langle v_j|\psi\rangle\Big|^2.$$

- после измерения: состояние $|v_j\rangle$

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

- результат измерения $\mathcal{M}$:

$$\Pr\Big[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\Big] = \Big|\langle v_j|\psi\rangle\Big|^2.$$

- после измерения: состояние $|v_j\rangle$

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

- результат измерения $\mathcal{M}$:

$$\Pr\Big[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\Big] = \big|\langle v_j|\psi\rangle\big|^2.$$

- после измерения: состояние $|v_j\rangle$
- рассмотрим сумму вероятностей всех исходов:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big|\langle v_j|\psi\rangle\big|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \langle\psi|v_j\rangle\langle v_j|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\sum_{j=0}^{N-1} |v_j\rangle\langle v_j|\right)|\psi\rangle = 1$$

Базис

- состояние

$$|\psi\rangle = c_0|v_0\rangle + c_1|v_1\rangle + \ldots + c_{N-1}|v_{N-1}\rangle,$$

- результат измерения $\mathcal{M}$:

$$\Pr\Big[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\Big] = \big|\langle v_j|\psi\rangle\big|^2.$$

- после измерения: состояние $|v_j\rangle$
- рассмотрим сумму вероятностей всех исходов:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\big|\langle v_j|\psi\rangle\big|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}\langle\psi|v_j\rangle\langle v_j|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\sum_{j=0}^{N-1}|v_j\rangle\langle v_j|\right)|\psi\rangle = 1$$

- операторы $|v\rangle\langle v|$ — проекторы

Проектор

Обобщение

Произвольные операторы $\mathcal{M} = \{\Pi_j\}$:

- $\Pi_j \Pi_k = 0$, если $j \neq k$
- $\sum_\mathrm{j} \Pi_\mathrm{j} = \mathrm{I}$

Проектор

Обобщение

Произвольные операторы $\mathcal{M} = \{\Pi_j\}$:

- $\Pi_j \Pi_k = 0$, если $j \neq k$
- $\sum_\mathrm{j} \Pi_\mathrm{j} = \mathrm{I}$

Результат измерения:

$$\Pr\left[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\right] = \langle\psi|\Pi_j|\psi\rangle.$$

Проектор

Обобщение

Произвольные операторы $\mathcal{M} = \{\Pi_j\}$:

- $\Pi_j \Pi_k = 0$, если $j \neq k$
- $\sum_\mathrm{j} \Pi_\mathrm{j} = \mathrm{I}$

Результат измерения:

$$\Pr\left[\mathcal{M}|\psi\rangle = j\right] = \langle\psi|\Pi_j|\psi\rangle.$$

После измерения:

$$|\psi'\rangle = \frac{\Pi_j|\psi\rangle}{\langle\psi|\Pi_j|\psi\rangle^{1/2}}$$

Наблюдаемые

- Эрмитова матрица M — самосопряжённая матрица: $M^T = \bar{M}$,

Наблюдаемые

- Эрмитова матрица M — самосопряжённая матрица: $M^T = \bar{M}$,
- Диагонализация: $M = U^\dagger D U$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.

Наблюдаемые

- Эрмитова матрица M — самосопряжённая матрица: $M^T = \bar{M}$,
- Диагонализация: $M = U^\dagger D U$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.
- С результатом измерения j связано собственное подпространство со значением λ_j.

Наблюдаемые

- Эрмитова матрица M — самосопряжённая матрица: $M^T = \bar{M}$,
- Диагонализация: $M = U^\dagger D U$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.
- С результатом измерения j связано собственное подпространство со значением λ_j.

Наблюдаемые

- Эрмитова матрица M — самосопряжённая матрица: $M^T = \bar{M}$,
- Диагонализация: $M = U^\dagger D U$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.
- С результатом измерения j связано собственное подпространство со значением λ_j.

Theorem

Пусть $|\psi\rangle$ — состояние, а H — наблюдаемая. Тогда её матожидание:

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle$$

Доказательство

$$\sum_j \langle\psi|\Pi_j|\psi\rangle\lambda_j = \langle\psi|\Big(\sum_j \lambda_j \Pi_j\Big)|\psi\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle.$$