Многокубитные операции

Квантовые вычисления–2023

2 сентября 2024 г.

Outline

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из A и B?

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из A и B?
- оказывается $A \otimes B$:

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из A и B?
- оказывается $A \otimes B$:
- базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$

Состояния сложных систем

- система А:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система В:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из А и В?
- оказывается $A \otimes B$:
- базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$
- поэтому состояние
  $c_{00}|u_0\rangle|v_0\rangle + c_{01}|u_0\rangle|v_1\rangle + c_{10}|u_1\rangle|v_0\rangle + c_{11}|u_1\rangle|v_1\rangle$,

Состояния сложных систем

- система A:

$$|\Psi\rangle = \alpha|u_0\rangle + \beta|u_1\rangle,$$

- система B:

$$|\Phi\rangle = \gamma|v_0\rangle + \delta|v_1\rangle,$$

- состояние системы, состоящей из A и B?
- оказывается $A \otimes B$:
- базисные состояния: $|u_0\rangle \otimes |v_0\rangle$, $|u_0\rangle|v_1\rangle$, $|u_1\rangle|v_0\rangle$, $|u_1\rangle|v_1\rangle$
- поэтому состояние $c_{00}|u_0\rangle|v_0\rangle + c_{01}|u_0\rangle|v_1\rangle + c_{10}|u_1\rangle|v_0\rangle + c_{11}|u_1\rangle|v_1\rangle$,
- где $c_{00}^2 + c_{01}^2 + c_{10}^2 + c_{11}^2 = 1$

Сцепленность

- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:

Сцепленность

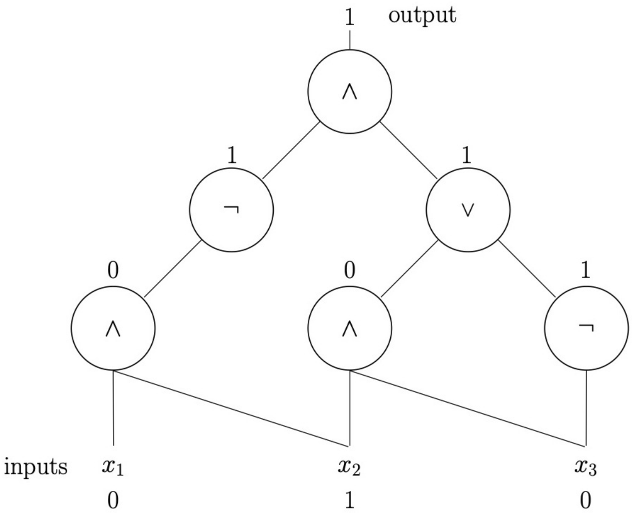
- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:
- состояние

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle + |01\rangle)$$

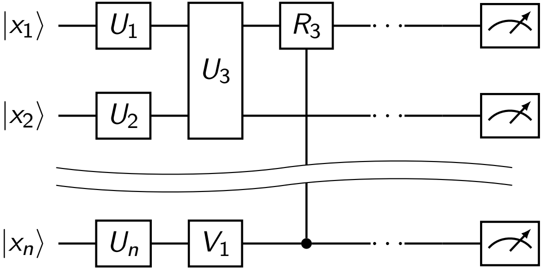
Сцепленность

- некоторые системы не сводятся к состоянию своих частей:
- состояние
$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle + |01\rangle)$$
- можно представить в виде $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$?

Схемы



Квантовые схемы



Квантовые схемы для вычислений

NOT

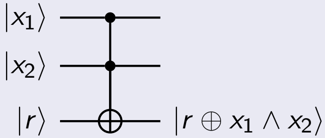
$$|x\rangle \; -\!\!\!-\!\!\oplus\!\!-\!\!\!- \; |\neg x\rangle$$

Квантовые схемы для вычислений

NOT

- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты

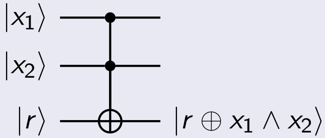


Квантовые схемы для вычислений

NOT

- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты



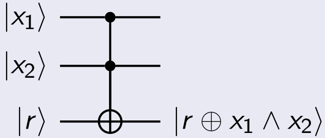
- $100 \mapsto 100$
- $110 \mapsto 111$
- $101 \mapsto 101$
- $111 \mapsto 110$

Квантовые схемы для вычислений

NOT

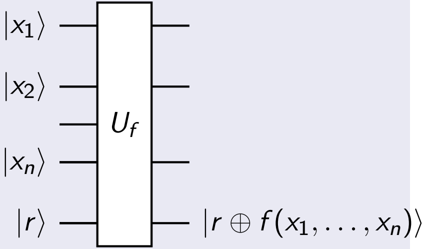
- $0 \mapsto 1$
- $1 \mapsto 0$

AND - вспомогательные кубиты



- $100 \mapsto 100$
- $110 \mapsto 111$
- $101 \mapsto 101$
- $111 \mapsto 110$

$f(x_1, \ldots, x_n)$



Вероятность и вычисления

Definition

Схема C вычисляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если:

- для всех наборов $x_1, \ldots, x_n$

$$\Pr\left[\mathcal{M}(U_C|x_1, \ldots, x_n\rangle) = r\right] > \frac{2}{3},$$

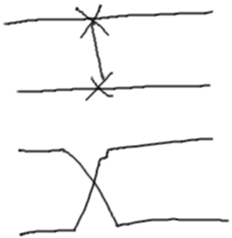
  где $r = f(x_1, \ldots, x_n)$

SWAP

- меняем местами значения двух кубитов

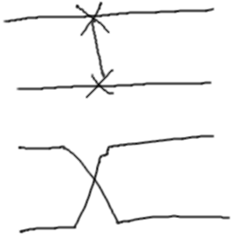
SWAP

- меняем местами значения двух кубитов
- обозначение



SWAP

- меняем местами значения двух кубитов
- обозначение



- матрица

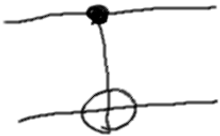
$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CNOT

- «условный оператор»

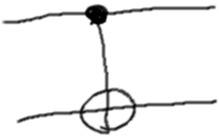
CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



CNOT

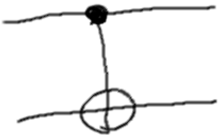
- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит $= 1$

CNOT

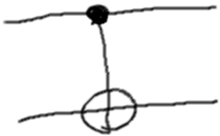
- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит $= 1$
- ничего не делаем, если управляющий $= 0$

CNOT

- «условный оператор»
- обозначение



- применяем NOT, если управляющий кубит $= 1$
- ничего не делаем, если управляющий $= 0$
- матрица

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Controlled-U

- «условно применяем» U

Controlled-U

- «условно применяем» U
- controlled-U, управляемый U

Controlled-U

- «условно применяем» U
- controlled-U, управляемый U
- обозначение

CCNOT

- controlled (controlled NOT)

CCNOT

- controlled (controlled NOT)
- преобразует:

$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$
$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

CCNOT

- controlled (controlled NOT)
- преобразует:

$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

CCNOT

- controlled (controlled NOT)
- преобразует:

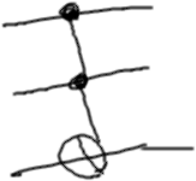
$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

- обозначение:



CCNOT

- controlled (controlled NOT)
- преобразует:

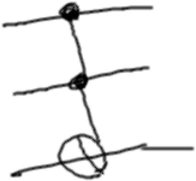
$$|110\rangle \mapsto |111\rangle;$$

$$|111\rangle \mapsto |110\rangle;$$

- остальное не меняет:

$$|abc\rangle \mapsto |abc\rangle.$$

- обозначение:



- аналогично: CCU, C^3U, ...

Способы управления

- применяем NOT, если управляющий кубит $= 0$

Способы управления

- применяем NOT, если управляющий кубит $= 0$
- ничего не делаем, если управляющий $= 1$

Способы управления

- применяем NOT, если управляющий кубит = 0
- ничего не делаем, если управляющий = 1
- обозначение:

Мотивация

- сколько всего операторов на n кубитах?

Мотивация

- сколько всего операторов на n кубитах?
- сколько всего квантовых схем на n кубитах из наших операторов?

Мотивация

- сколько всего операторов на n кубитах?
- сколько всего квантовых схем на n кубитах из наших операторов?
- почему их достаточно?

Теорема Соловэя-Китаева (Solovay-Kitaev)

Theorem

Для произвольного $\epsilon > 0$ *и для любого* U *существует схема* C *глубины* $\log^{3.001}(1/\epsilon)$ *такая, что* $\|C - U\| \leq \epsilon$.
Эта схема C *состоит только из гейтов* $CNOT$, H, S *и* T.